

## Оглавление

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> . . . . .                                                                       | 17 |
| <b>Глава I. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ</b> . . . . .                                    | 19 |
| § 1. МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ . . . . .                                                                     | 19 |
| § 2. ОБРАТИМОСТЬ МАТРИЦЫ, БЛИЗКОЙ К ОБРАТИМОЙ МАТРИЦЕ . . . . .                                    | 26 |
| § 3. ОШИБКИ В РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ . . . . .                                                   | 27 |
| § 4. МЕТОД ГАУССА . . . . .                                                                        | 31 |
| § 4.1. Алгоритм метода Гаусса . . . . .                                                            | 32 |
| § 4.2. Оценка количества арифметических операций в методе Гаусса . . . . .                         | 34 |
| § 4.3. Представление метода Гаусса в виде последовательности элементарных преобразований . . . . . | 35 |
| § 4.4. Алгоритм построения $LU$ -разложения . . . . .                                              | 37 |
| § 4.5. Оценка количества арифметических операций в алгоритме построения $LU$ -разложения . . . . . | 39 |
| § 4.6. Осуществимость метода Гаусса . . . . .                                                      | 40 |
| § 5. МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ДЛЯ ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ . . . . .                | 41 |
| § 5.1. Метод Гаусса для ленточных матриц . . . . .                                                 | 41 |
| § 5.2. Алгоритм $LU$ -разложения для трехдиагональных матриц . . . . .                             | 43 |
| § 5.3. Метод прогонки для трехдиагональных матриц . . . . .                                        | 45 |
| § 6. ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦЫ . . . . .                                                            | 47 |

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 7. МЕТОД ГАУССА С ВЫБОРОМ ГЛАВНОГО ЭЛЕМЕНТА                                                              | 48 |
| § 8. МЕТОД ЖОРДАНА (ГАУССА – ЖОРДАНА)                                                                      | 55 |
| § 9. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ                                                                     | 58 |
| § 10. МЕТОД ХОЛЕЦКОГО (КВАДРАТНОГО КОРНЯ)                                                                  | 61 |
| § 10.1. Разложение Холецкого                                                                               | 61 |
| § 10.2. Алгоритм построения разложения Холецкого                                                           | 63 |
| § 10.3. Оценка количества арифметических операций в алгоритме построения разложения Холецкого              | 66 |
| § 11. МЕТОД ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ                                                                                | 68 |
| § 11.1. Описание алгоритма                                                                                 | 68 |
| § 11.2. Оценка количества арифметических операций                                                          | 70 |
| § 11.3. Организация вычислений и хранения данных                                                           | 71 |
| § 11.4. Аналог выбора главного элемента                                                                    | 72 |
| § 12. МЕТОД ВРАЩЕНИЙ                                                                                       | 74 |
| § 12.1. Матрица элементарного вращения и ее свойства                                                       | 75 |
| § 12.2. Алгоритм метода вращений                                                                           | 79 |
| § 12.3. Оценка количества арифметических операций в методе вращений                                        | 82 |
| § 12.4. Построение $QR$ -разложения методом вращений                                                       | 85 |
| § 12.5. Оценка количества арифметических операций в алгоритме построения $QR$ -разложения методом вращений | 88 |
| § 13. МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ                                                                                      | 88 |
| § 13.1. Матрица отражения и ее свойства                                                                    | 89 |
| § 13.2. Алгоритм метода отражений                                                                          | 92 |
| § 13.3. Оценка количества арифметических операций в методе отражений                                       | 96 |
| § 13.4. Построение $QR$ -разложения методом отражений                                                      | 99 |

|                                                                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 13.5. Оценка количества арифметических операций в алгоритме построения $QR$ -разложения методом отражений . . . . . | 101        |
| § 14. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К ПОЧТИ ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ УНИТАРНЫМ ПОДОБИЕМ МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЙ . . . . .                      | 103        |
| § 14.1. Случай произвольной матрицы . . . . .                                                                         | 103        |
| § 14.2. Случай симметричной матрицы . . . . .                                                                         | 110        |
| § 15. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ К ПОЧТИ ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ УНИТАРНЫМ ПОДОБИЕМ МЕТОДОМ ОТРАЖЕНИЙ . . . . .                     | 117        |
| § 15.1. Случай произвольной матрицы . . . . .                                                                         | 118        |
| § 15.2. Случай самосопряженной матрицы . . . . .                                                                      | 123        |
| <b>Глава II. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ . . . . .</b>                                                     | <b>129</b> |
| § 1. ТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ . . . . .                                                                           | 129        |
| § 2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ . . . . .                                                                       | 132        |
| § 3. ОШИБКИ ПРИ НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ . . . . .                                                             | 135        |
| § 4. СТЕПЕННОЙ МЕТОД . . . . .                                                                                        | 136        |
| § 4.1. Нахождение максимального по модулю собственного значения . . . . .                                             | 137        |
| § 4.1.1. Описание алгоритма . . . . .                                                                                 | 137        |
| § 4.1.2. Оценка количества арифметических операций на один шаг алгоритма . . . . .                                    | 139        |
| § 4.2. Нахождение минимального по модулю собственного значения . . . . .                                              | 140        |
| § 4.3. Нахождение собственного значения, наиболее близкого к заданному числу $\lambda$ . . . . .                      | 141        |
| § 5. МЕТОД ВРАЩЕНИЙ ЯКОБИ . . . . .                                                                                   | 142        |
| § 5.1. Описание алгоритма . . . . .                                                                                   | 142        |

|          |                                                                                                             |     |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 5.2.   | Выбор угла вращения . . . . .                                                                               | 145 |
| § 5.3.   | Стратегии выбора обнуляемого элемента . . . . .                                                             | 148 |
| § 5.3.1. | Метод вращений с выбором максимального элемента . . . . .                                                   | 149 |
| § 5.3.2. | Метод вращений с циклическим выбором обнуляемого элемента . . . . .                                         | 150 |
| § 5.3.3. | Метод вращений с выбором оптимального элемента . . . . .                                                    | 151 |
| § 6.     | МЕТОД БИСЕКЦИИ . . . . .                                                                                    | 153 |
| § 6.1.   | Алгоритм вычисления $k$ -го по величине собственного значения методом бисекции . . . . .                    | 154 |
| § 6.2.   | Алгоритм вычисления всех собственных значений на заданном интервале методом бисекции . . . . .              | 155 |
| § 6.2.1. | Рекурсивный алгоритм . . . . .                                                                              | 155 |
| § 6.2.2. | Алгоритм последовательного поиска собственных значений . . . . .                                            | 156 |
| § 6.3.   | Алгоритм вычисления всех собственных значений методом бисекции . . . . .                                    | 157 |
| § 6.4.   | Вычисление числа перемен знака в последовательности главных миноров . . . . .                               | 157 |
| § 6.4.1. | Вычисление числа перемен знака в последовательности главных миноров с помощью $LU$ -разложения . . . . .    | 157 |
| § 6.4.2. | Вычисление числа перемен знака в последовательности главных миноров с помощью рекуррентных формул . . . . . | 158 |
| § 7.     | $LR$ АЛГОРИТМ . . . . .                                                                                     | 160 |
| § 7.1.   | $LR$ -разложение, используемое в $LR$ алгоритме . . . . .                                                   | 160 |
| § 7.1.1. | Алгоритм построения $LR$ -разложения для произвольной матрицы . . . . .                                     | 161 |

|          |                                                                                             |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 7.1.2. | Алгоритм построения $LR$ -разложения для почти треугольной матрицы . . . .                  | 164 |
| § 7.1.3. | Алгоритм построения $LR$ -разложения для трехдиагональной матрицы . . . .                   | 164 |
| § 7.2.   | $LR$ алгоритм нахождения собственных значений                                               | 165 |
| § 7.2.1. | $LR$ алгоритм нахождения собственных значений для почти треугольной матрицы . . . . .       | 167 |
| § 7.2.2. | $LR$ алгоритм нахождения собственных значений для трехдиагональной матрицы . . . . .        | 168 |
| § 7.3.   | Ускорение сходимости алгоритма . . . . .                                                    | 169 |
| § 7.3.1. | Исчерпывание матрицы . . . . .                                                              | 170 |
| § 7.3.2. | Сдвиги . . . . .                                                                            | 171 |
| § 7.3.3. | Практическая организация вычислений в $LR$ алгоритме . . . . .                              | 173 |
| § 8.     | МЕТОД ХОЛЕЦКОГО . . . . .                                                                   | 174 |
| § 8.1.   | Разложение Холецкого, используемое в методе Холецкого . . . . .                             | 174 |
| § 8.1.1. | Алгоритм построения разложения Холецкого для произвольной самосопряженной матрицы . . . . . | 175 |
| § 8.1.2. | Алгоритм построения разложения Холецкого для трехдиагональной матрицы                       | 177 |
| § 8.2.   | Метод Холецкого нахождения собственных значений . . . . .                                   | 178 |
| § 8.2.1. | Метод Холецкого нахождения собственных значений для трехдиагональной матрицы . . . . .      | 180 |
| § 8.3.   | Ускорение сходимости алгоритма . . . . .                                                    | 182 |
| § 8.3.1. | Исчерпывание матрицы . . . . .                                                              | 182 |

|                                                                         |                                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 8.3.2.                                                                | Сдвиги . . . . .                                                                                          | 182        |
| § 8.3.3.                                                                | Практическая организация вычислений в методе Холецкого . . . . .                                          | 183        |
| § 9.                                                                    | <i>QR</i> АЛГОРИТМ . . . . .                                                                              | 184        |
| § 9.1.                                                                  | <i>QR</i> -разложение, используемое в <i>QR</i> алгоритме .                                               | 185        |
| § 9.1.1.                                                                | Алгоритм построения <i>QR</i> -разложения для произвольной матрицы . . . . .                              | 185        |
| § 9.1.2.                                                                | Алгоритм построения <i>QR</i> -разложения для почти треугольной матрицы . . . .                           | 185        |
| § 9.1.3.                                                                | Алгоритм построения <i>QR</i> -разложения для трехдиагональной матрицы . . . .                            | 194        |
| § 9.2.                                                                  | <i>QR</i> алгоритм нахождения собственных значений                                                        | 199        |
| § 9.2.1.                                                                | <i>QR</i> алгоритм нахождения собственных значений для почти треугольной матрицы . . . . .                | 201        |
| § 9.2.2.                                                                | <i>QR</i> алгоритм нахождения собственных значений для самосопряженной трехдиагональной матрицы . . . . . | 203        |
| § 9.3.                                                                  | Ускорение сходимости алгоритма . . . . .                                                                  | 206        |
| § 9.3.1.                                                                | Исчерпывание матрицы . . . . .                                                                            | 207        |
| § 9.3.2.                                                                | Сдвиги . . . . .                                                                                          | 207        |
| § 9.3.3.                                                                | Практическая организация вычислений в <i>QR</i> алгоритме . . . . .                                       | 208        |
| § 10.                                                                   | МЕТОД ОБРАТНОЙ ИТЕРАЦИИ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ . . . . .                                         | 209        |
| <b>СПИСОК ТЕМ К ПЕРВОЙ ЧАСТИ КУРСА . . . . .</b>                        |                                                                                                           | <b>213</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА К ПЕРВОЙ ЧАСТИ КУРСА . . . . .</b>                        |                                                                                                           | <b>219</b> |
| <b>Глава III. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ . . . . .</b> |                                                                                                           | <b>220</b> |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ . . . . .                           | 220 |
| § 2. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ БАЗИСА . . . . .                                            | 223 |
| § 3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА . . . . .                               | 225 |
| § 4. РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ . . . . .                                              | 227 |
| § 5. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА . . . . .                                  | 234 |
| § 6. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ «ДВИЖУЩИМИСЯ» МНОГОЧЛЕ-<br>НАМИ . . . . .                      | 236 |
| § 7. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ<br>ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА . . . . .            | 238 |
| § 8. РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ . . . . .                            | 240 |
| § 9. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ . . . . .                                    | 242 |
| § 10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ МНОГОЧЛЕНА ЛА-<br>ГРАНЖА В ФОРМЕ НЬЮТОНА . . . . .  | 248 |
| § 11. МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА . . . . .                                              | 253 |
| § 12. МИНИМИЗАЦИЯ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ<br>ЗА СЧЕТ ВЫБОРА УЗЛОВ . . . . .     | 257 |
| § 13. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЁВА . . . . .                               | 260 |
| § 13.1. Постановка задачи линейной интерполяции . . . . .                        | 260 |
| § 13.2. Алгоритм построения разложения . . . . .                                 | 265 |
| § 13.3. Оценка количества арифметических операций . . . . .                      | 266 |
| § 13.4. Связь разложения по многочленам Чебышёва и<br>интерполяции . . . . .     | 267 |
| § 14. ПРЕИМУЩЕСТВА КУСОЧНО-МНОГОЧЛЕННОЙ АП-<br>ПРОКСИМАЦИИ . . . . .             | 270 |
| § 15. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ . . . . .                                    | 271 |
| § 16. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МЕТО-<br>ДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ . . . . . | 274 |
| § 16.1. Постановка задачи линейной интерполяции . . . . .                        | 274 |

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 16.2. Вычисление матрицы системы задачи линейной интерполяции . . . . .                       | 277 |
| § 16.3. Свойства приближающей функции . . . . .                                                 | 280 |
| § 16.4. Вычисление правой части системы задачи линейной интерполяции . . . . .                  | 283 |
| § 17. АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ЧЕБЫШЁВА МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ . . . . .                | 289 |
| § 17.1. Интегральные свойства многочленов Чебышёва .                                            | 289 |
| § 17.2. Постановка задачи линейной интерполяции . . .                                           | 292 |
| § 17.3. Вычисление коэффициентов разложения . . . . .                                           | 294 |
| § 17.4. Алгоритм вычисления коэффициентов разложения                                            | 299 |
| § 17.5. Оценка количества арифметических операций . .                                           | 300 |
| § 18. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА СПЕЦИАЛЬНЫХ СЕТКАХ . . . . .           | 300 |
| § 19. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КУСОЧНО-КУБИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ . . . . .                                      | 303 |
| § 19.1. Общая схема . . . . .                                                                   | 304 |
| § 19.2. Алгоритм вычисления коэффициентов многочлена $P_i$ . . . . .                            | 304 |
| § 19.3. Кусочная интерполяция кубическими многочленами Эрмита . . . . .                         | 305 |
| § 19.4. Кусочная интерполяция кубическими многочленами Бесселя . . . . .                        | 307 |
| § 19.5. Кусочная интерполяция кубическими многочленами методом Акимы . . . . .                  | 308 |
| § 19.6. Кусочная интерполяция кубическими многочленами с использованием разделенных разностей . | 310 |
| § 19.7. Интерполяция кубическими сплайнами . . . . .                                            | 312 |
| § 19.8. Определение недостающих граничных условий .                                             | 314 |



|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 19.8.1. Определение недостающих граничных условий по известным значениям первой производной функции в граничных узлах . . . . . | 314 |
| § 19.8.2. Определение недостающих граничных условий по известным значениям второй производной функции в граничных узлах . . . . . | 315 |
| § 19.8.3. «Естественные» граничные условия . .                                                                                    | 316 |
| § 19.8.4. Условие «отсутствия узла» в приграничных узлах . . . . .                                                                | 317 |
| § 19.8.5. Дополнительный узел в приграничных узлах . . . . .                                                                      | 320 |
| § 19.8.6. Экстраполяция в приграничных узлах .                                                                                    | 322 |
| § 20. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ . . . . .                                                                            | 322 |
| § 20.1. Общая схема . . . . .                                                                                                     | 323 |
| § 20.2. Алгоритм вычисления коэффициентов многочлена $P_i$ . . . . .                                                              | 323 |
| § 20.3. Интерполяция параболическими сплайнами . . .                                                                              | 325 |
| § 20.4. Определение недостающих граничных условий .                                                                               | 328 |
| § 20.4.1. Определение недостающих граничных условий по известным значениям первой производной функции в граничных узлах . . . . . | 328 |
| § 20.4.2. Определение недостающих граничных условий по известным значениям второй производной функции в граничных узлах . . . . . | 332 |
| § 20.4.3. «Естественные» граничные условия . .                                                                                    | 332 |
| § 20.4.4. Условие «отсутствия узла» в приграничных узлах . . . . .                                                                | 333 |

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 20.4.5. Дополнительный узел в приграничных узлах . . . . .                                        | 336        |
| § 20.4.6. Экстраполяция в приграничных узлах . . . . .                                              | 337        |
| <b>Глава IV. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ . . . . .</b>                             | <b>338</b> |
| § 1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕНЗОРНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ . . . . .                     | 338        |
| § 1.1. Постановка задачи интерполяции тензорными произведениями и теорема корректности . . . . .    | 339        |
| § 1.2. Оценка числа арифметических операций . . . . .                                               | 341        |
| § 1.3. Алгоритм интерполяции тензорными произведениями . . . . .                                    | 342        |
| § 1.4. Программная реализация алгоритма . . . . .                                                   | 343        |
| § 1.5. Интерполяция тензорными произведениями в случае многочленной аппроксимации . . . . .         | 345        |
| § 1.5.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа . . . . .                                              | 345        |
| § 1.5.2. Разделенные разности для функции многих переменных . . . . .                               | 346        |
| § 1.5.3. Интерполяционная формула Ньютона . . . . .                                                 | 347        |
| § 1.5.4. Интерполяция «движущимися» многочленами . . . . .                                          | 348        |
| § 1.5.5. Интерполяция с кратными узлами . . . . .                                                   | 349        |
| § 1.5.6. Разложение по многочленам Чебышёва . . . . .                                               | 349        |
| § 1.5.7. Аппроксимация многочленами Чебышёва методом наименьших квадратов . . . . .                 | 351        |
| § 1.6. Интерполяция тензорными произведениями в случае кусочно-многочленной аппроксимации . . . . . | 353        |
| § 1.6.1. Кусочно-линейная интерполяция . . . . .                                                    | 354        |
| § 1.6.2. Кусочно-линейная аппроксимация методом наименьших квадратов . . . . .                      | 356        |

|                                                   |                                                                            |            |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 1.6.3.                                          | Кусочно-кубическая интерполяция . . .                                      | 358        |
| § 1.6.4.                                          | Кусочно-квадратичная интерполяция . . .                                    | 362        |
| § 2.                                              | ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ . . . . . | 366        |
| § 2.1.                                            | Постановка задачи линейной интерполяции . . .                              | 366        |
| § 2.2.                                            | Способы построения триангуляции области . . .                              | 367        |
| § 2.3.                                            | Приближение функций в треугольнике . . . . .                               | 369        |
| § 2.3.1.                                          | Постановка задачи линейной интерполяции . . . . .                          | 369        |
| § 2.3.2.                                          | Приближение функций в прямоугольном треугольнике . . . . .                 | 370        |
| § 2.3.3.                                          | Приближение линейными функциями . . .                                      | 372        |
| § 2.3.4.                                          | Приближение квадратическими функциями . . . . .                            | 375        |
| § 2.3.5.                                          | Приближение кубическими функциями . . .                                    | 379        |
| § 2.4.                                            | Приближение функций методом наименьших квадратов . . . . .                 | 383        |
| § 2.4.1.                                          | Постановка задачи линейной интерполяции . . . . .                          | 384        |
| § 2.4.2.                                          | Вычисление системы задачи линейной интерполяции . . . . .                  | 385        |
| <b>СПИСОК ТЕМ КО ВТОРОЙ ЧАСТИ КУРСА . . . . .</b> |                                                                            | <b>387</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА КО ВТОРОЙ ЧАСТИ КУРСА . . . . .</b> |                                                                            | <b>394</b> |